

2022 年全国统一高考数学试卷（甲卷文科）

注意事项：

1. 答题前，务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时，必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时，必须使用 0.5 毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后，只将答题卡交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x | 0 \leq x < \frac{5}{2}\}$, 则 $A \cap B =$

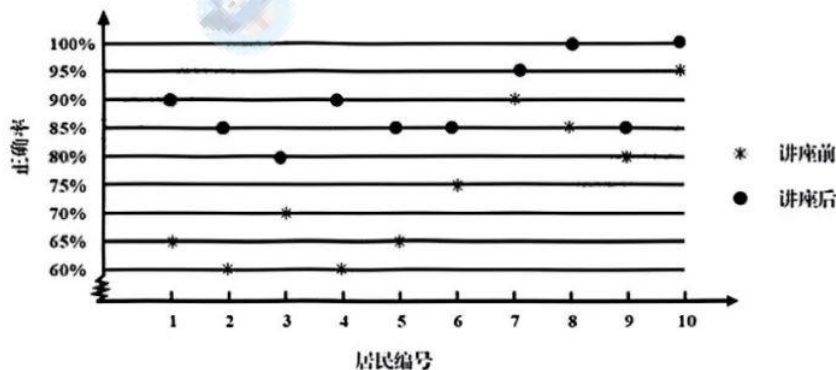
- A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{-2, -1, 0\}$ C. $\{0, 1\}$ D. $\{1, 2\}$

【答案】A

【解析】方法一：直接通过交集的运算定义可得 $A \cap B = \{0, 1, 2\}$ 故选 A.

方法二：代入排除法，排除 B/C/D, 选 A.

2. 某社区通过公益讲座以普及社区居民的垃圾分类知识. 为了解讲座效果，随机抽取 10 位社区居民，让他们在讲座前和讲座后各回答一份垃圾分类知识问卷，这 10 位社区居民在讲座前和讲座后问卷答题的正确率如下图：



则

- A. 讲座前问卷答题的正确率的中位数小于 70%
B. 讲座后问卷答题的正确率的平均数大于 85%
C. 讲座前问卷答题的正确率的标准差小于讲座后正确率的标准差
D. 讲座后问卷答题的正确率的极差大于讲座前正确率的极差

【答案】B

【解析】对于 A 选项：讲座前问卷答题的正确率中位数为 $\frac{70\% + 75\%}{2} = 72.5\%$ ，故 A 错误；

对于 B 选项：可直接通过图表观察得知：问卷大题的正确率的平均数大于 85% 所以 B 对；
 对于 C 选项：讲座前问卷答题的正确率数据波动要大于讲座后问卷答题的正确率，故标准差也应该大于讲座后的标准差，所以 C 错；
 对于 D 选项：讲座前正确率的极差为 35%，讲座后的为 20%，故 D 错。

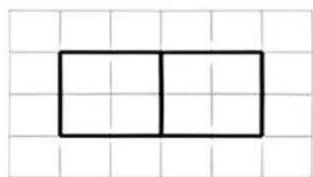
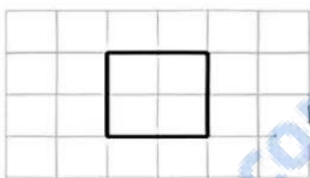
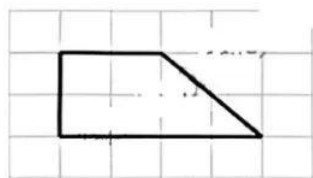
3. 若 $z=1+i$ ，则 $|iz+3\bar{z}|=$

- A. $4\sqrt{5}$ B. $4\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{5}$ D. $2\sqrt{2}$

【答案】A

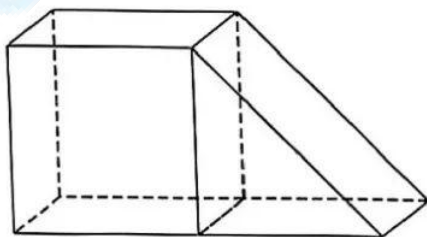
【解析】由 $z=1+i$ 故 $iz+3\bar{z}=i(1+i)+3(1-i)=2-2i$ ， $|iz+3\bar{z}|=|2-2i|=2\sqrt{2}$ 。

4. 如图，网格纸上绘制的是一个多面体的三视图，网格小正方形的边长为 1，则该多面体的体积为



- A. 8 B. 12 C. 16 D. 20

【答案】B



【解析】该多面体是一个 $2 \times 2 \times 2$ 的正方体与一个直三棱柱的合体，如上图直三棱柱底面是一个直角边为 2 的等腰直角三角形。高为 2，所以体积为： $2 \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 = 8 + 4 = 12$ 故选 B。

5. 将函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 的图像向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后得到曲线 C，若 C

关于 y 轴对称，则 ω 的最小值是：

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$

【答案】C

【解析】记 $g(x)$ 为 $f(x)$ 向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位后得到的曲线，则 $g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) =$

$\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{3}\right)$ 由 $g(x)$ 关于 Y 轴对称，可得： $\frac{\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，故有

$\omega = \frac{1}{3} + 2k$ ，所以 ω 的最小值为 $\frac{1}{3}$ 。选 C。

6. 从分别写有 1, 2, 3, 4, 5, 6 的 6 张卡片中无放回随机抽取 2 张，则抽到的 2 张卡片上的数字之积是 4 的倍数的概率为 ()

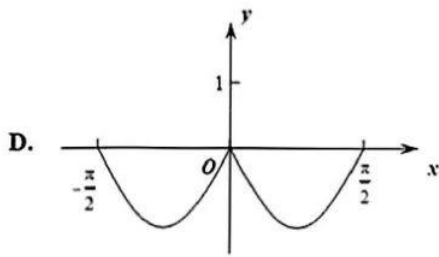
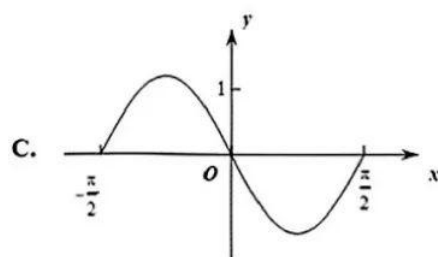
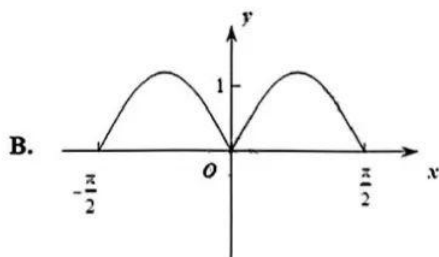
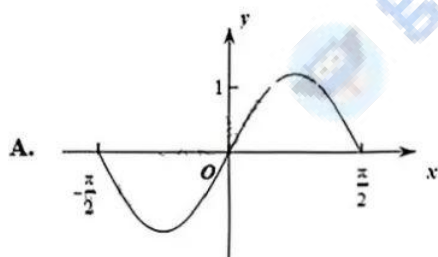
A. $\frac{1}{5}$
C. $\frac{2}{5}$

B. $\frac{1}{3}$
D. $\frac{2}{3}$

【答案】B

【解析】无放回随机抽取 2 张方法有 12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56 共 15 种，其中数字之积为 4 的倍数的是 14, 24, 26, 45, 46 共 5 种， $p = \frac{m}{n} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ ，故选 B。

7. 函数 $f(x) = (3^x - 3^{-x})\cos x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 的图像大致为 ()



【答案】A

【解析】因为 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(3^{\frac{\pi}{4}} - 3^{-\frac{\pi}{4}}\right)\cos\frac{\pi}{4} > 0$ ，所以排除 C、D；又因为

$f(-x) = (3^{-x} - 3^{-(-x)})\cos(-x) = -(3^x - 3^{-x})\cos x = -f(x)$, 所以是奇函数, 故选 A.

8. 当 $x=1$ 时, 函数 $f(x) = a\ln x + \frac{b}{x}$ 取得最大值 -2, 则 $f'(2) = (\quad)$

A. -1

B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{2}$

D. 1

【答案】B

【解析】因为 $f'(x) = \frac{ax-b}{x^2}$, 由题意可知 $f'(1) = a-b=0$, $f(1) = a\ln 1 + b = b = -2$,

所以 $a = -2$, 因此 $f'(2) = \frac{-2 \times 2 - (-2)}{4} = -\frac{1}{2}$, 故选 B.

9. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 B_1D 与平面 $ABCD$ 和平面 AA_1B_1B 所成的角均为 30° , 则 ()

A. $AB = 2AD$

B. AB 与平面 AB_1C_1D 所成的角为 30°

C. $AC = CB_1$

D. B_1D 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 45°

【答案】D

【解析】如图由题意可知 $\angle B_1DB$ 和 $\angle DB_1A$ 分别是 B_1D 与平面 $ABCD$ 和平面 AA_1B_1B 所成的角, 所以 $\angle B_1DB = \angle DB_1A = 30^\circ$, 设 $AB = a, AD = b, AA_1 = c$ 根据题意有

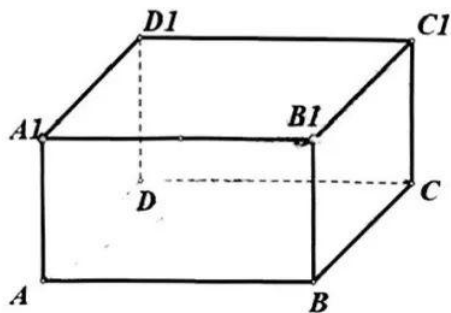
$\frac{b}{\sqrt{a^2+c^2}} = \tan 30^\circ$, 即 $a^2 + c^2 = 3b^2$ ①, 同理有 $a^2 + b^2 = 3c^2$ ②, 由①和②可得

$a = \sqrt{2}b$, 所以 $AB = \sqrt{2}AD$ 错误; 所以 $AC = \sqrt{3}b$, $CB_1 = \sqrt{2}b$, C 错误;

过 B 做 $BM \perp AB_1$ 于 M , 则 $BM \perp$ 面 AB_1C_1D , $\angle BAB_1$ 是 AB 与平面 AB_1C_1D 所成的角,

$\sin \angle BAB_1 = \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 B 错误; $\angle B_1DC$ 是 B_1D 与平面 BB_1C_1C 所成的角,

$\sin \angle B_1DC = \frac{B_1C}{B_1D} = \frac{\sqrt{2}b}{2b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\angle B_1DC = \frac{\pi}{4}$, 故选 D.



10. 甲、乙两个圆锥的母线长相等，侧面展开图的圆心角之和为 2π ，侧面面积分别为 $S_{\text{甲}}$ 和

$S_{\text{乙}}$ ，体积分别为 $V_{\text{甲}}$ 和 $V_{\text{乙}}$ ，若 $\frac{S_{\text{甲}}}{S_{\text{乙}}} = 2$ ，则 $\frac{V_{\text{甲}}}{V_{\text{乙}}} = (\quad)$

- A. $\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{10}$ D. $\frac{5\sqrt{10}}{4}$

【答案】C

【解析】设甲、乙两个圆锥的母线长 l ，圆锥甲的底面半径为 $r_{\text{甲}}$ ，高为 $h_{\text{甲}}$ ，圆锥乙的底面半径为 $r_{\text{乙}}$ ，高为 $h_{\text{乙}}$ ，甲侧面展开图的圆心角为 α ，则乙侧面展开图的圆心角为 $2\pi - \alpha$ ，

$$\frac{S_{\text{甲}}}{S_{\text{乙}}} = \frac{\alpha}{2\pi - \alpha} = 2, \text{ 所以 } \alpha = \frac{4\pi}{3}, r_{\text{甲}} = \frac{2}{3}l, r_{\text{乙}} = \frac{1}{3}l, h_{\text{甲}} = \frac{\sqrt{5}}{3}l, h_{\text{乙}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}l,$$

$$\frac{V_{\text{甲}}}{V_{\text{乙}}} = \frac{\frac{1}{3}\pi r_{\text{甲}}^2 h_{\text{甲}}}{\frac{1}{3}\pi r_{\text{乙}}^2 h_{\text{乙}}} = \sqrt{10}, \text{ 故选 C.}$$

11. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{3}$ ， A_1, A_2 分别为 C 的左、右顶点， B 为

C 的上顶点. 若 $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BA_2} = -1$ ，则 C 的方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{16} = 1$ B. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$
C. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ D. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

【答案】C

【解析】由题意， $A_1(-a, 0)$ ， $A_2(a, 0)$ ， $B(0, b)$ ，所以 $\overrightarrow{BA_1} = (-a, -b)$ ， $\overrightarrow{BA_2} = (a, -b)$ ，

$$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BA_2} = -a^2 + b^2 = -1 \quad \text{①. 又 } 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{2}{3}, \text{ 即 } b^2 = \frac{2}{3}a^2, \text{ 代入①式解得 } a^2 = 3, b^2 = 2, \text{ 所}$$

以 C 的方程为 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ ，答案选 C.

12. 已知 $9^m = 10$, $a = 10^m - 11$, $b = 8^m - 9$, 则 ()

A. $a > 0 > b$

B. $a > b > 0$

C. $b > a > 0$

D. $b > 0 > a$

【答案】A

【解析】由 $9^m = 10$, 可得 $m = \log_9 10 \in (1, 1.5)$.

根据 a, b 的形式构造函数 $f(x) = x^m - x - 1$ ($x > 1$), 则 $f'(x) = mx^{m-1} - 1$,

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x_0 = m^{\frac{1}{1-m}}$, 由 $m = \log_9 10 \in (1, 1.5)$ 知 $x_0 \in (0, 1)$.

$f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(10) > f(8)$, 即 $a > b$,

又因为 $f(9) = 9^{\log_9 10} - 10 = 0$, 所以 $a > 0 > b$, 答案选 A.

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知向量 $a = (m, 3)$, $b = (1, m+1)$, 若 $a \perp b$, 则 $m =$ _____.

【答案】 $-\frac{3}{4}$

【解析】由 $a \perp b$, 得 $m + 3m + 3 = 0$, 解得 $m = -\frac{3}{4}$.

14. 设点 M 在直线 $2x + y - 1 = 0$ 上, 点 $(3, 0)$ 和 $(0, 1)$ 均在 $\odot M$ 上, 则 $\odot M$ 的方程为 _____.

【答案】 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5$

【解析】方法一: 因为点 $(3, 0)$ 和 $(0, 1)$ 的中点为 $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ 且 $k = -\frac{1}{3}$,

所以点 $(3, 0)$ 和 $(0, 1)$ 的垂直平分线方程为: $y = 3x - 4$,

联立方程 $\begin{cases} y = 3x - 4 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases}$, 解得圆心 $M(1, -1)$.

又 $r^2 = (3-1)^2 + 1^2 = 5$,

所以 $\odot M$ 的方程为 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5$.

方法二: 设圆心 $M(a, 1-2a)$, 则 $r^2 = (a-3)^2 + (1-2a)^2 = (a-0)^2 + (1-2a-1)^2$,

解得 $a=1$.

从而得 $\odot M$ 的方程为 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5$.

15. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 e , 写出满足条件“直线 $y = 2x$ 与 C 无公共点”的 e 的一个值 _____.

【答案】2 (答案不唯一, 只要 $1 < e < \sqrt{5}$ 即可)

【解析】因为双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$,

要使直线 $y = 2x$ 与 C 无公共点, 则只需要 $2 > \frac{b}{a}$ 即可,

由 $\frac{b}{a} < 2$ 的 $\frac{c^2 - a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} < 4$, 所以 $e^2 < 5$,

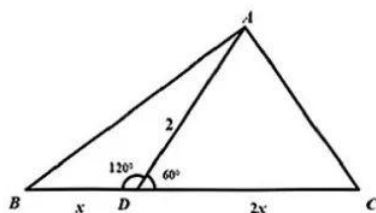
解得 $1 < e < \sqrt{5}$.

16. 已知 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 BC 上, $\angle ADB = 120^\circ$, $AD = 2$, $CD = 2BD$, 当 $\frac{AC}{AB}$ 取得最小值时,

$BD =$.

【答案】 $\sqrt{3} - 1$

【解析】设 $BD = x$, 则 $CD = 2x$,



则在 $\triangle ABD$ 中由余弦定理得: $AB^2 = 2^2 + x^2 - 2 \times 2 \cdot x \cos 120^\circ$ 即 $AB^2 = 4 + x^2 + 2x$,

在 $\triangle ADC$ 中由余弦定理得: $AC^2 = 2^2 + (2x)^2 - 2 \times 2 \cdot 2x \cos 60^\circ$ 即 $AC^2 = 4 + 4x^2 + 4x$,

所以 $\left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = \frac{4 + 4x^2 + 4x}{4 + x^2 + 2x}$, $x > 0$,

设 $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 4}$, $x > 0$, 则 $f'(x) = \frac{3x^2 + 6x - 6}{(x^2 + 2x + 4)^2} = 0$ 得: $x = \sqrt{3} - 1$.

可知 $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{3} - 1)$ 单调递减, 在 $(\sqrt{3} - 1, +\infty)$ 单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $x = \sqrt{3} - 1$ 时取得最小值,

所以当 $\frac{AC}{AB}$ 取得最小值时, $BD = \sqrt{3} - 1$.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答。

(一) 必考题: 共 60 分。

17. (12 分)

甲、乙两城之间的长途客车均由 A 和 B 两家公司运营，为了解这两家公司长途客车的运行情况，随机调查了甲、乙两城之间的 500 个班次，得到下面列联表：

	准点班次数	未准点班次数
A	240	20
B	210	30

(1) 根据上表，分别估计这两家公司甲、乙两城之间的长途客车准点的概率：

(2) 能否有 90% 的把握认为甲、乙两城之间的长途客车是否准点与客车所属公司有关？

$$\text{附：} k^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

【答案】(1) 0.923, 0.75; (2) 见解析

【解析】(1) 甲城一共调查了 260 辆车，其中有 240 辆准点，故甲城准点的概率 $= \frac{240}{260} = 0.923$ ，

乙城一共调查了 240 辆，其中有 210 辆准点。故乙城准点的概率 $= \frac{210}{240} = 0.75$ 。

(2)：

	准点班次数	未准点班次数	合计
A	240	20	260
B	210	30	240
合计	450	50	500

$$k^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{500(240 \times 30 - 210 \times 20)^2}{260 \times 240 \times 450 \times 50} = 3.2 > 2.706$$

所以有 90% 的把握认为甲、乙两城之间的长途客车是否准点与客车所属公司有关

18. (12 分)

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $\frac{2S_n}{n} + n = 2a_n + 1$.

(1) 证明: $\{a_n\}$ 是等差数列;

(2) 若 a_4, a_7, a_9 成等比数列, 求 S_n 的最小值.

【答案】(1) 见解析; (2) -78

【解析】(1) 由已知得 $2S_n + n^2 = 2na_n + n$. 当 $n=1$ 时, 原式恒成立;

当 $n \geq 2$ 时, $2S_{n-1} + (n-1)^2 = 2(n-1)a_{n-1} + (n-1)$;

两式相减得: $2a_n + 2n - 1 = 2na_n - 2(n-1)a_{n-1} + 1$,

整理得: $(2n-2)a_n = (2n-2)a_{n-1} + (2n-2)$,

因为 $n \geq 2$, 故 $2n-2 > 0$, 所以 $a_n - a_{n-1} = 1 (n \geq 2)$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列。

(2) 由 (1) $d = 1$; 由题意 $a_7^2 = a_4 a_9$, 即 $(a_1 + 6)^2 = (a_1 + 3)(a_1 + 8)$, 化简得: $a_1 = -12$.

$$\text{故 } S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = -12n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{25}{2}n = \frac{1}{2}\left(n - \frac{25}{2}\right)^2 - \frac{625}{8}$$

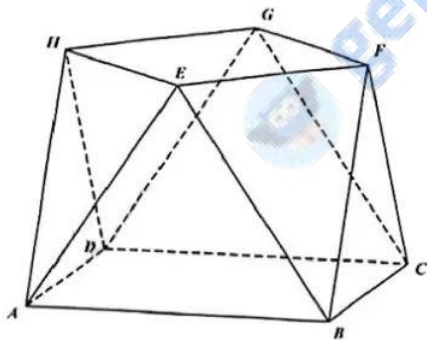
因为 $n \in \mathbb{N}^*$, 所以 $n = 12$ 或 $n = 13$ 时, $(S_n)_{\min} = -78$.

19. (12 分)

小明同学参加综合实践活动, 设计了一个封闭的包装盒, 包装盒如图所示: 底面 $ABCD$ 是边长为 8 (单位: cm) 的正方形, $\triangle EAB$, $\triangle FBC$, $\triangle GCD$, $\triangle HDA$ 均为正三角形, 且它们所在的平面都与平面 $ABCD$ 垂直.

(1) 证明: $EF \parallel$ 平面 $ABCD$

(2) 求该包装盒的容积 (不计包装盒材料的厚度)



【答案】(1) 见解析; (2) $\frac{640\sqrt{3}}{3}$

【解析】(1) 过点 E 作 $EE' \perp AB$ 于点 E' , 过点 F 作 $FF' \perp BC$ 于点 F' , 连接 $E'F'$

$\because$ 底面 $ABCD$ 是边长为 8 的正方形, $\triangle EAB$ 、 $\triangle FBC$ 均为正三角形, 且它们所在的平面都与平面 $ABCD$ 垂直,

$$\therefore EE' \perp AB, FF' \perp BC,$$

$$\therefore EE' \perp \text{平面 } ABCD, FF' \perp \text{平面 } ABCD,$$

$$\therefore EF \parallel E'F',$$

$\therefore E'F' \subset \text{平面 } ABCD$,

$\therefore EF \parallel \text{平面 } ABCD$.

(2) 同理, 过点 G, H 分别作 $GG' \perp CD, HH' \perp DA$, 交 CD, DA 于点 G', H' ,

连接 $F'G', G'H', H'E', AC$, 由 (1) 及题意可知,

G', H' 分别为 CD, DA 的中点, $EFGH - E'F'G'H'$ 为长方体,

故该包装盒可分成一个长方体和四个相等的四棱锥组合而成.

由底面 $ABCD$ 是边长为 8 的正方形可得: $E'F' = H'E' = \frac{1}{2}AC = 4\sqrt{2}$,

$\therefore$ 所求该包装盒的容积为

$$V = V_{EFGH-E'F'G'H'} + 4V_{A-EE'H'H}$$

$$= E'F' \times E'H' \times EE' + 4 \times \frac{1}{3} \times S_{EE'H'H} \times \frac{1}{4}AC$$

$$= 4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} \times \sqrt{4} + \frac{4}{3} \times \sqrt{4} \times \sqrt{4} \times \sqrt{4}$$

$$= \frac{64\sqrt{4}}{3}$$

20. (12 分)

已知函数 $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = x^2 + a$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_1, f(x_1))$ 处的切线也是曲线 $y = g(x)$ 的切线.

(1) 若 $x_1 = -1$, 求 a ;

(2) 求 a 的取值范围.

【答案】(1) $a = 1$; (2) $a \geq -1$

【解析】(1) $\because f'(x) = 3x^2 - 1$, $\therefore f'(1) = 2$, 且 $f(1) = 0$

故 $y = f(x)$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线为 $y = 2x$

又 $y = 2x$ 与 $y = g(x)$ 相切, 将直线 $y = 2x$ 代入 $g(x) = x^2 + a$ 得 $x^2 - 2x + a = 0$

由 $\Delta = 4 - 4a = 0$ 得 $a = 1$

(2) $\because f'(x) = 3x^2 - 1$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_1, f(x_1))$ 处的切线为

$$y - (x_1^3 - x_1) = (3x_1^2 - 1)(x - x_1), \text{ 即 } y = (3x_1^2 - 1)x - 2x_1^3;$$

由 $g(x) = x^2 + a$ 得 $g'(x) = 2x$,

设 $y = g(x)$ 在点 $(x_2, g(x_2))$ 处的切线为 $y - (x_2^2 + a) = 2x_2(x - x_2)$,

即 $y = -2x_2x - x_2^2 + a$,

$$\therefore \begin{cases} 3x_1^2 - 1 = 2x_2 \\ -2x_1^3 = a - x_2^2 \end{cases},$$

$$\therefore a = x_2^2 - 2x_1^3 = \frac{1}{4}(9x_1^4 - 8x_1^3 - 6x_1^2 + 1).$$

令 $h(x_1) = 9x_1^4 - 8x_1^3 - 6x_1^2 + 1$, 则 $h'(x_1) = 36x_1^3 - 24x_1^2 - 12x_1 = 12x_1(x_1 - 1)(3x_1 + 1)$

当 $x_1 < -\frac{1}{3}$ 或 $0 < x_1 < 1$ 时, $h'(x_1) < 0$, 此时函数 $y = h(x_1)$ 单调递减;

当 $-\frac{1}{3} < x_1 < 0$ 或 $x_1 > 1$ 时, $h'(x_1) > 0$, 此时函数 $y = h(x_1)$ 单调递增;

又 $h(-\frac{1}{3}) = \frac{20}{27}$, $h(0) = 1$, $h(1) = -4$, $\therefore h(x_1)_{\min} = h(1) = -4$

$\therefore a \geq \frac{-4}{4} = -1$, 故 $a \geq -1$

21. (12分)

设抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 点 $D(p, 0)$, 过 F 的直线交 C 于 M, N 两点. 当直线 MD 垂直于 x 轴时, $|MF| = 3$.

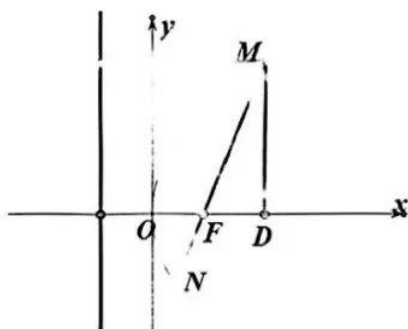
(1) 求 C 的方程;

(2) 设直线 MD, ND 与 C 的另一个交点分别为 A, B , 记直线 MN, AB 的倾斜角分别为 α, β . 当 $\alpha - \beta$ 取得最大值时, 求直线 AB 的方程.

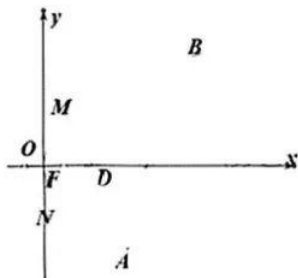
【答案】(1) $y^2 = 4x$; (2) $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(x - 4)$

【解析】(1) 如图, 由已知 $x_M = p$, $|MF| = 3 = x_M + \frac{p}{2}$,

所以 $p = 2$, 抛物线 C 的方程 $y^2 = 4x$.



(2) 令 $K_{MN} = k_1 = \tan \alpha$, $K_{AB} = k_2 = \tan \beta$, $\tan(\alpha - \beta) = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$.



令 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), (y_1 > 0, y_2 < 0)$ $A(x_3, y_3), B(x_4, y_4) (y_3 < 0, y_4 > 0)$, $AB: y = k_2(x - m)$,

$$\text{由} \begin{cases} y = k_1(x - 1) \\ y^2 = 4x \end{cases} \text{得 } x_1 x_2 = 1,$$

$$\text{由} \begin{cases} y = k_2(x - m) \\ y^2 = 4x \end{cases} \text{得 } x_3 x_4 = m^2,$$

$$\text{由} \begin{cases} y = k_{MD}(x - 2) \\ y^2 = 4x \end{cases} \text{得 } x_1 x_3 = 4, \begin{cases} y = k_{ND}(x - 2) \\ y^2 = 4x \end{cases} \text{得 } x_2 x_4 = 4,$$

所以有 $M(x_1, 2\sqrt{x_1}), N(\frac{1}{x_1}, \frac{-2}{\sqrt{x_1}}), A(\frac{4}{x_1}, \frac{-4}{\sqrt{x_1}}), B(4x_1, 4\sqrt{x_1})$.

$$k_1 = \frac{2\sqrt{x_1}}{x_1 - 1}, k_2 = \frac{\sqrt{x_1}}{x_1 - 1},$$

$$\text{所以 } \tan(\alpha - \beta) = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = \frac{k_2}{1 + 2k_2^2} = \frac{1}{\frac{1}{k_2} + 2k_2},$$

故当 $k_2^2 = \frac{1}{2}$ 时, $\alpha - \beta$ 最大.

此时易得 $x_3 x_4 = 16x_1 x_2 = m^2$, 所以 $m = 4$, 所以 AB 方程: $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(x - 4)$.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{2+t}{6} \\ y = \sqrt{t} \end{cases}$ (t 是参数), 曲线 C_2 的参数方

程为 $\begin{cases} x = -\frac{2+s}{6} \\ y = -\sqrt{s} \end{cases}$ (s 是参数).

(1) 写出 C_1 的普通方程;

(2) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴建立极坐标系, 曲线 C_3 的极坐标方程为 $2\cos\theta - \sin\theta = 0$, 求 C_3 与 C_1 交点的直角坐标, 及 C_3 与 C_2 交点的直角坐标.

【答案】(1) $y^2 = 6x - 2 (y \geq 0)$; (2) $(-1, -2)$ 和 $(-\frac{1}{2}, -1)$

【解析】(1) $C_1: \begin{cases} x = \frac{2+t}{6} \\ y = \sqrt{t} \end{cases}$, 消去参数 t 得 $x = \frac{2+y^2}{6} (y \geq 0) \Rightarrow y^2 = 6x - 2 (y \geq 0)$.

(2) $C_3: 2\cos\theta - \sin\theta = 0$, 两边乘 ρ , $\Rightarrow 2\rho\cos\theta - \rho\sin\theta = 0$.

$$\therefore C_3: y=2x.$$

$$\text{联立} \begin{cases} y^2 = 6x - 2 (y \geq 0) \\ y = 2x \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

C_2 消去参数 s 得 $y^2 = -6x - 2 (y \leq 0)$

$$\text{联立} \begin{cases} y^2 = -6x - 2 (y \leq 0) \\ y = 2x \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases}$$

综上所述, C_3 与 C_1 交点为 $(\frac{1}{2}, 1)$ 和 $(1, 2)$; C_3 与 C_2 交点为 $(-1, -2)$ 和 $(-\frac{1}{2}, -1)$.

23. [选修 4-4: 不等式选讲] (10 分)

已知 a, b, c 均为正数, 且 $a^2 + b^2 + 4c^2 = 3$, 证明:

(1) $a + b + 2c \leq 3$;

(2) 若 $b = 2c$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \geq 3$.

【答案】(1) 见解析; (2) 见解析

【解析】(1) 由柯西不等式知:

$$(a^2 + b^2 + 4c^2)(1^2 + 1^2 + 1^2) \geq (a + b + 2c)^2$$

即 $3 \times 3 \geq (a + b + 2c)^2$ 且 a, b, c 是正实数,

故 $a + b + 2c \leq 3$ (当且仅当 $a = b = 2c$ 时取等, 即 $a = b = 1, c = \frac{1}{2}$)

(2) 由①知 $a + b + 2c \leq 3$ 且 $b = 2c$.

$$\text{故 } 0 < a + 4c \leq 3, \frac{1}{a + 4c} \geq \frac{1}{3}.$$

由权方和不等式知

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1^2}{a} + \frac{2^2}{4c} \geq \frac{9}{a + 4c} \geq 3.$$

$$\text{故 } \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \geq 3.$$