

2022 年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号框涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号框, 回答非选择题时, 将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 集合 $M = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $N = \{x | -1 < x < 6\}$, 则 $M \cap N = (\quad)$

- A. $\{2, 4\}$ B. $\{2, 4, 6\}$ C. $\{2, 4, 6, 8\}$ D. $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据集合的交集运算即可解出。

【详解】因为 $M = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $N = \{x | -1 < x < 6\}$, 所以 $M \cap N = \{2, 4\}$ 。

故选: A.

2. 设 $(1+2i)a+b=2i$, 其中 a, b 为实数, 则 $(\quad)$

- A. $a=1, b=-1$ B. $a=1, b=1$ C. $a=-1, b=1$ D. $a=-1, b=-1$

【答案】A

【解析】

【分析】根据复数代数形式的运算法则以及复数相等的概念即可解出。

【详解】因为 $a, b \in \mathbb{R}$, $(a+b)+2ai=2i$, 所以 $a+b=0, 2a=2$, 解得: $a=1, b=-1$ 。

故选: A.

3. 已知向量 $\vec{a} = (2, 1), \vec{b} = (-2, 4)$, 则 $\left| \frac{\vec{r}}{a-b} \right| (\quad)$

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【答案】D

【解析】

【分析】先求得 $\vec{a}-\vec{b}$ ，然后求得 $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

【详解】因为 $\vec{a}-\vec{b}=(2,1)-(-2,4)=(4,-3)$ ，所以 $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$.

故选：D

4. 分别统计了甲、乙两位同学 16 周的各周课外体育运动时长（单位：h），得如下茎叶图：

甲		乙
6 1	5.	
8 5 3 0	6.	3
7 5 3 2	7.	4 6
6 4 2 1	8.	1 2 2 5 6 6 6 6
4 2	9.	0 2 3 8
	10.	1

则下列结论中错误的是（ ）

- A. 甲同学周课外体育运动时长的样本中位数为 7.4
- B. 乙同学周课外体育运动时长的样本平均数大于 8
- C. 甲同学周课外体育运动时长大于 8 的概率的估计值大于 0.4
- D. 乙同学周课外体育运动时长大于 8 的概率的估计值大于 0.6

【答案】C

【解析】

【分析】结合茎叶图、中位数、平均数、古典概型等知识确定正确答案.

【详解】对于 A 选项，甲同学周课外体育运动时长的样本中位数为 $\frac{7.3+7.5}{2}=7.4$ ，A 选项结论正确.

对于 B 选项，乙同学课外体育运动时长的样本平均数为：

$$\frac{6.3+7.4+7.6+8.1+8.2+8.2+8.5+8.6+8.6+8.6+8.6+9.0+9.2+9.3+9.8+10.1}{16}=8.50625>8.$$

B 选项结论正确.

对于 C 选项，甲同学周课外体育运动时长大于 8 的概率的估计值 $\frac{6}{16}=0.375<0.4$ ，

C 选项结论错误.

对于 D 选项，乙同学周课外体育运动时长大于 8 的概率的估计值 $\frac{13}{16}=0.8125>0.6$ ，

D 选项结论正确.

故选：C

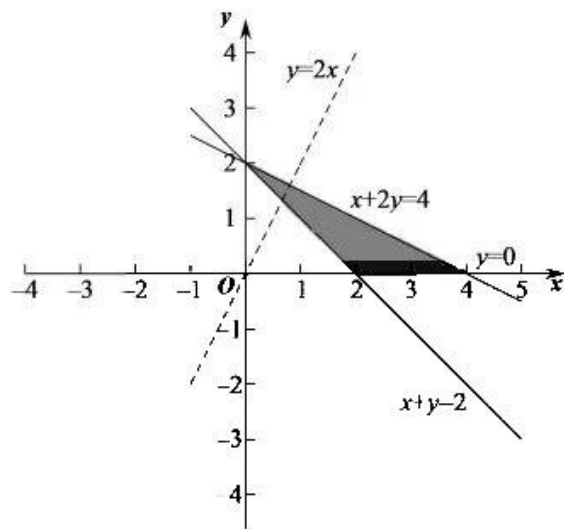
5. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \leq 2, \\ x+2y \leq 4, \\ y \geq 0, \end{cases}$ 则 $z=2x-y$ 的最大值是（ ）

【答案】C

【解析】

【分析】作出可行域，数形结合即可得解.

【详解】由题意作出可行域，如图阴影部分所示，

转化目标函数 $z = 2x - y$ 为 $y = 2x - z$,上下平移直线 $y = 2x - z$, 可得当直线过点 $(4,0)$ 时, 直线截距最小, z 最大,所以 $z_{\max} = 2 \times 4 - 0 = 8$.

故选: C.

6. 设 F 为抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点, 点 A 在 C 上, 点 $B(3,0)$, 若 $|AF| = |BF|$, 则 $|AB| = (\quad)$

A. 2

B. $2\sqrt{2}$

C. 3

D. $3\sqrt{2}$

【答案】B

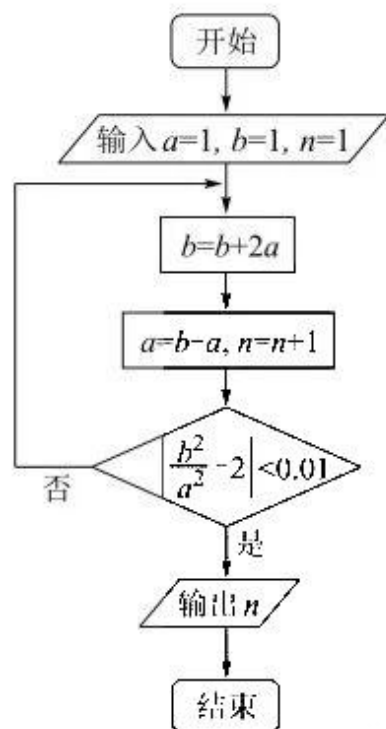
【解析】

【分析】根据抛物线上的点到焦点和准线的距离相等, 从而求得点 A 的横坐标, 进而求得点 A 坐标, 即可得到答案.【详解】由题意得, $F(1,0)$, 则 $|AF| = |BF| = 2$,即点 A 到准线 $x = -1$ 的距离为 2, 所以点 A 的横坐标为 $-1 + 2 = 1$,不妨设点 A 在 x 轴上方, 代入得, $A(1,2)$,

$$\text{所以 } |AB| = \sqrt{(3-1)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{2}.$$

故选：B

7. 执行下边的程序框图，输出的 $n = (\quad)$



A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

【答案】B

【解析】

【分析】根据框图循环计算即可.

【详解】执行第一次循环， $b = b + 2a = 1 + 2 = 3$ ，

$$a = b - a = 3 - 1 = 2, n = n + 1 = 2,$$

$$\left| \frac{b^2}{a^2} - 2 \right| = \left| \frac{3^2}{2^2} - 2 \right| = \frac{1}{4} > 0.01;$$

执行第二次循环， $b = b + 2a = 3 + 4 = 7$ ，

$$a = b - a = 7 - 2 = 5, n = n + 1 = 3,$$

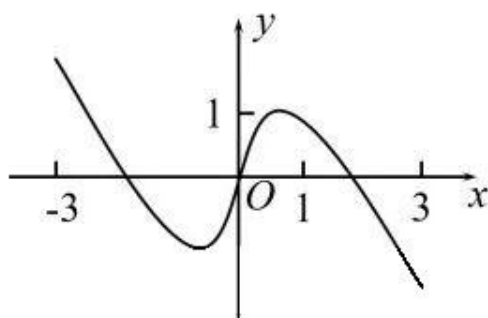
$$\left| \frac{b^2}{a^2} - 2 \right| = \left| \frac{7^2}{5^2} - 2 \right| = \frac{1}{25} > 0.01;$$

$$a = b - a = 17 - 5 = 12, n = n + 1 = 4,$$

$$\left| \frac{b^2}{a^2} - 2 \right| = \left| \frac{17^2}{12^2} - 2 \right| = \frac{1}{144} < 0.01, \text{ 此时输出 } n = 4.$$

故选: B

8. 如图是下列四个函数中的某个函数在区间 $[-3, 3]$ 的大致图像, 则该函数是 ()



A. $y = \frac{-x^3 + 3x}{x^2 + 1}$

B. $y = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$

C. $y = \frac{2x \cos x}{x^2 + 1}$

D. $y = \frac{2 \sin x}{x^2 + 1}$

【答案】A

【解析】

【分析】由函数图像的特征结合函数的性质逐项排除即可得解.

【详解】设 $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$, 则 $f(1) = 0$, 故排除 B;

设 $h(x) = \frac{2x \cos x}{x^2 + 1}$, 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $0 < \cos x < 1$,

所以 $h(x) = \frac{2x \cos x}{x^2 + 1} < \frac{2x}{x^2 + 1} \leq 1$, 故排除 C;

设 $g(x) = \frac{2 \sin x}{x^2 + 1}$, 则 $g(3) = \frac{2 \sin 3}{10} > 0$, 故排除 D.

故选: A.

9. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为 AB, BC 的中点, 则 ()

A. 平面 $B_1EF \perp$ 平面 BDD_1

B. 平面 $B_1EF \perp$ 平面 A_1BD

C. 平面 $B_1EF \parallel$ 平面 A_1AC

D. 平面 $B_1EF \parallel$ 平面 A_1C_1D

【答案】A

【解析】



【分析】证明 $EF \perp$ 平面 BDD_1 ，即可判断 A；如图，以点 D 为原点，建立空间直角坐标系，设 $AB=2$ ，

分别求出平面 B_1EF ， A_1BD ， A_1C_1D 的法向量，根据法向量的位置关系，即可判断 BCD.

【详解】解：在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

$AC \perp BD$ 且 $DD_1 \perp$ 平面 $ABCD$ ，

又 $EF \subset$ 平面 $ABCD$ ，所以 $EF \perp DD_1$ ，

因为 E, F 分别为 AB, BC 的中点，

所以 $EF \parallel AC$ ，所以 $EF \perp BD$ ，

又 $BD \cap DD_1 = D$ ，

所以 $EF \perp$ 平面 BDD_1 ，

又 $EF \subset$ 平面 B_1EF ，

所以平面 $B_1EF \perp$ 平面 BDD_1 ，故 A 正确；

如图，以点 D 为原点，建立空间直角坐标系，设 $AB=2$ ，

则 $B_1(2, 2, 2), E(2, 1, 0), F(1, 2, 0), B(2, 2, 0), A_1(2, 0, 2), A(2, 0, 0), C(0, 2, 0)$ ，

$C_1(0, 2, 2)$ ，

则 $\overrightarrow{EF} = (-1, 1, 0), \overrightarrow{EB_1} = (0, 1, 2), \overrightarrow{DB} = (2, 2, 0), \overrightarrow{DA_1} = (2, 0, 2)$ ，

$\overrightarrow{AA_1} = (0, 0, 2), \overrightarrow{AC} = (-2, 2, 0), \overrightarrow{A_1C_1} = (-2, 2, 0)$ ，

设平面 B_1EF 的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$ ，

则有 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{EF} = -x_1 + y_1 = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{EB_1} = y_1 + 2z_1 = 0 \end{cases}$ ，可取 $\vec{m} = (2, 2, -1)$ ，

同理可得平面 A_1BD 的法向量为 $\vec{n}_1 = (1, -1, -1)$ ，

平面 A_1AC 的法向量为 $\vec{n}_2 = (1, 1, 0)$ ，

平面 A_1C_1D 的法向量为 $\vec{n}_3 = (1, 1, -1)$ ，

则 $\vec{m} \cdot \vec{n}_1 = 2 - 2 + 1 = 1 \neq 0$ ，

所以平面 B_1EF 与平面 A_1BD 不垂直，故 B 错误；

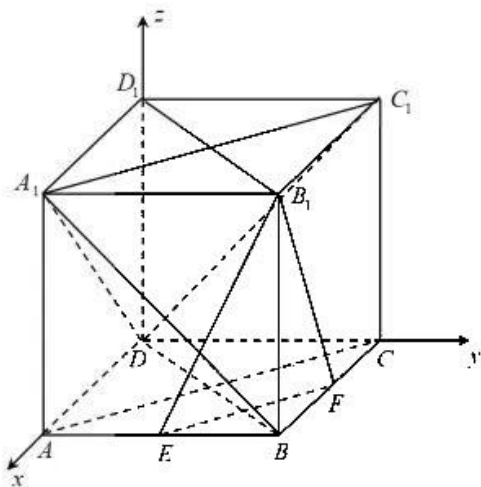
因为 $\overline{m}$ 与 $\overline{n_2}$ 不平行,

所以平面 B_1EF 与平面 A_1AC 不平行, 故 C 错误;

因为 $\overline{m}$ 与 $\overline{n_3}$ 不平行,

所以平面 B_1EF 与平面 A_1C_1D 不平行, 故 D 错误,

故选: A.



10. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项和为 168, $a_2 - a_5 = 42$, 则 $a_6 =$ ()

A. 14

B. 12

C. 6

D. 3

【答案】D

【解析】

【分析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q, q \neq 0$, 易得 $q \neq 1$, 根据题意求出首项与公比, 再根据等比数列的通项即可得解.

【详解】解: 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q, q \neq 0$,

若 $q = 1$, 则 $a_2 - a_5 = 0$, 与题意矛盾,

所以 $q \neq 1$,

$$\text{则} \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = 168 \\ a_2 - a_5 = a_1q - a_1q^4 = 42 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a_1 = 96 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases},$$

所以 $a_6 = a_1q^5 = 3$.

故选: D.

11. 函数 $f(x) = \cos x + (x+1)\sin x + 1$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 的最小值、最大值分别为 ()

A. $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

B. $-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

C. $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2$

D. $-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2$

【答案】D

【解析】

【分析】利用导数求得 $f(x)$ 的单调区间, 从而判断出 $f(x)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的最小值和最大值.

【详解】 $f'(x) = -\sin x + \sin x + (x+1)\cos x = (x+1)\cos x$,

所以 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ 上 $f'(x) > 0$, 即 $f(x)$ 单调递增;

在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 上 $f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 单调递减,

$$\text{又 } f(0) = f(2\pi) = 2, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 2, \quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\left(\frac{3\pi}{2} + 1\right) + 1 = -\frac{3\pi}{2},$$

所以 $f(x)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的最小值为 $-\frac{3\pi}{2}$, 最大值为 $\frac{\pi}{2} + 2$.

故选: D

12. 已知球 O 的半径为 1, 四棱锥的顶点为 O , 底面的四个顶点均在球 O 的球面上, 则当该四棱锥的体积最大时, 其高为 ()

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】先证明当四棱锥的顶点 O 到底面 $ABCD$ 所在小圆距离一定时, 底面 $ABCD$ 面积最大值为 $2r^2$, 进而得到四棱锥体积表达式, 再利用均值定理去求四棱锥体积的最大值, 从而得到当该四棱锥的体积最大时其高的值.

【详解】设该四棱锥底面为四边形 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 所在小圆半径为 r ,

设四边形 $ABCD$ 对角线夹角为 α ,

$$\text{则 } S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin \alpha \leq \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \leq \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot 2r = 2r^2$$

(当且仅当四边形 $ABCD$ 为正方形时等号成立)

即当四棱锥的顶点 O 到底面 $ABCD$ 所在小圆距离一定时, 底面 $ABCD$ 面积最大值为 2^2

$$\text{又 } r^2 + h^2 = 1$$

$$\text{则 } V_{O-ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 2r^2 \cdot h = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{r^2 \cdot r^2 \cdot 2h^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\left(\frac{r^2 + r^2 + 2h^2}{3}\right)^3} = \frac{4\sqrt{3}}{27}$$

当且仅当 $r^2 = 2h^2$ 即 $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立,

故选: C

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $2S_3 = 3S_2 + 6$, 则公差 $d =$ _____.

【答案】2

【解析】

【分析】转化条件为 $2(a_1 + 2d) = 2a_1 + d + 6$, 即可得解.

【详解】由 $2S_3 = 3S_2 + 6$ 可得 $2(a_1 + a_2 + a_3) = 3(a_1 + a_2) + 6$, 化简得 $2a_3 = a_1 + a_2 + 6$,

即 $2(a_1 + 2d) = 2a_1 + d + 6$, 解得 $d = 2$.

故答案为: 2.

14. 从甲、乙等 5 名同学中随机选 3 名参加社区服务工作, 则甲、乙都入选的概率为 _____.

【答案】 $\frac{3}{10}$

【解析】

【分析】根据古典概型计算即可

【详解】从 5 名同学中随机选 3 名的方法数为 $C_5^3 = 10$

甲、乙都入选的方法数为 $C_3^1 = 3$, 所以甲、乙都入选的概率 $P = \frac{3}{10}$

故答案为: $\frac{3}{10}$

15. 过四点 $(0,0), (4,0), (-1,1), (4,2)$ 中的三点的一个圆的方程为 _____.

【答案】 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 13$ 或 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ 或 $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{65}{9}$ 或

$$\left(x - \frac{8}{5}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{169}{25};$$

【解析】

【分析】设圆的方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ，根据所选点的坐标，得到方程组，解得即可；

【详解】解：依题意设圆的方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ，

$$\text{若过}(0,0), (4,0), (-1,1), \text{则} \begin{cases} F=0 \\ 16+4D+F=0 \\ 1+1-D+E+F=0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} F=0 \\ D=-4 \\ E=-6 \end{cases}$$

所以圆的方程为 $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$ ，即 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 13$ ；

$$\text{若过}(0,0), (4,0), (4,2), \text{则} \begin{cases} F=0 \\ 16+4D+F=0 \\ 16+4+4D+2E+F=0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} F=0 \\ D=-4 \\ E=-2 \end{cases}$$

所以圆的方程为 $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ ，即 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ ；

$$\text{若过}(0,0), (4,2), (-1,1), \text{则} \begin{cases} F=0 \\ 1+1-D+E+F=0 \\ 16+4+4D+2E+F=0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} F=0 \\ D=-\frac{8}{3} \\ E=-\frac{14}{3} \end{cases}$$

所以圆的方程为 $x^2 + y^2 - \frac{8}{3}x - \frac{14}{3}y = 0$ ，即 $\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{3}\right)^2 = \frac{65}{9}$ ；

$$\text{若过}(-1,1), (4,0), (4,2), \text{则} \begin{cases} 1+1-D+E+F=0 \\ 16+4D+F=0 \\ 16+4+4D+2E+F=0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} F=-\frac{16}{5} \\ D=-\frac{16}{5} \\ E=-2 \end{cases}$$

所以圆的方程为 $x^2 + y^2 - \frac{16}{5}x - 2y - \frac{16}{5} = 0$ ，即 $\left(x - \frac{8}{5}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{169}{25}$ ；

故答案为： $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 13$ 或 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ 或 $\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{3}\right)^2 = \frac{65}{9}$ 或

$$\left(x - \frac{8}{5}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{169}{25};$$

16. 若 $f(x) = \ln \left| a + \frac{1}{1-x} \right| + b$ 是奇函数, 则 $a = \underline{\hspace{1cm}}$, $b = \underline{\hspace{1cm}}$.

【答案】 ①. $-\frac{1}{2}$; ②. $\ln 2$.

【解析】

【分析】根据奇函数的定义即可求出.

【详解】因为函数 $f(x) = \ln \left| a + \frac{1}{1-x} \right| + b$ 为奇函数, 所以其定义域关于原点对称.

由 $a + \frac{1}{1-x} \neq 0$ 可得, $(1-x)(a+1-ax) \neq 0$, 所以 $x = \frac{a+1}{a} = -1$, 解得: $a = -\frac{1}{2}$, 即函数的定义域为

$(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$, 再由 $f(0) = 0$ 可得, $b = \ln 2$. 即 $f(x) = \ln \left| -\frac{1}{2} + \frac{1}{1-x} \right| + \ln 2 = \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$,

在定义域内满足 $f(-x) = -f(x)$, 符合题意.

故答案为: $-\frac{1}{2}$; $\ln 2$.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

17. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin C \sin(A-B) = \sin B \sin(C-A)$.

(1) 若 $A = 2B$, 求 C ;

(2) 证明: $2a^2 = b^2 + c^2$

【答案】 (1) $\frac{5\pi}{8}$;

(2) 证明见解析.

【解析】

【分析】(1) 根据题意可得, $\sin C = \sin(C-A)$, 再结合三角形内角和定理即可解出;

(2) 由题意利用两角差的正弦公式展开得

$\sin C(\sin A \cos B - \cos A \sin B) = \sin B(\sin C \cos A - \cos C \sin A)$, 再根据正弦定理, 余弦定理化简即可证出.

【小问 1 详解】

由 $A = 2B$, $\sin C \sin(A-B) = \sin B \sin(C-A)$ 可得, $\sin C \sin B = \sin B \sin(C-A)$, 而 $0 < B < \frac{\pi}{2}$,

所以 $\sin B \in (0, 1)$, 即有 $\sin C = \sin(C-A) > 0$, 而 $0 < C < \pi, 0 < C-A < \pi$, 显然 $C \neq C-A$, 所以,

$$C + C - A = \pi, \text{ 而 } A = 2B, A + B + C = \pi, \text{ 所以 } C = \frac{5\pi}{8}.$$

【小问 2 详解】

由 $\sin C \sin(A-B) = \sin B \sin(C-A)$ 可得,

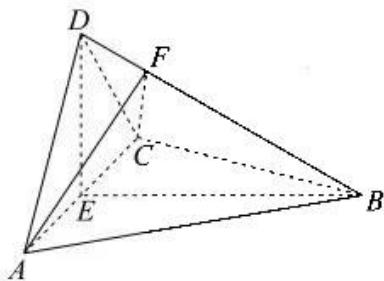
$\sin C (\sin A \cos B - \cos A \sin B) = \sin B (\sin C \cos A - \cos C \sin A)$, 再由正弦定理可得,

$ac \cos B - bc \cos A = bc \cos A - ab \cos C$, 然后根据余弦定理可知,

$$\frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2) - \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2), \text{ 化简得:}$$

$$2a^2 = b^2 + c^2, \text{ 故原等式成立.}$$

18. 如图, 四面体 $ABCD$ 中, $AD \perp CD, AD = CD, \angle ADB = \angle BDC$, E 为 AC 的中点.



(1) 证明: 平面 $BED \perp$ 平面 ACD ;

(2) 设 $AB = BD = 2, \angle ACB = 60^\circ$, 点 F 在 BD 上, 当 $\triangle AFC$ 的面积最小时, 求三棱锥 $F-ABC$ 的体积.

【答案】(1) 证明详见解析

$$(2) \frac{\sqrt{3}}{4}$$

【解析】

【分析】(1) 通过证明 $AC \perp$ 平面 BED 来证得平面 $BED \perp$ 平面 ACD .

(2) 首先判断出三角形 AFC 的面积最小时 F 点的位置, 然后求得 F 到平面 ABC 的距离, 从而求得三棱锥 $F-ABC$ 的体积.

【小问 1 详解】

由于 $AD = CD$, E 是 AC 的中点, 所以 $AC \perp DE$.

$$\text{由于} \begin{cases} AD = CD \\ BD = BD \\ \angle ADB = \angle CDB \end{cases}, \text{ 所以 } \triangle ADB \cong \triangle CDB,$$

所以 $AB = CB$, 故 $AC \perp BD$,

由于 $DE \cap BD = D$, $DE, BD \nsubseteq$ 平面 BED ,

所以 $AC \perp$ 平面 BED ,

由于 $AC \subset$ 平面 ACD , 所以平面 $BED \perp$ 平面 ACD .

【小问2详解】

依题意 $AB = BD = BC = 2$, $\angle ACB = 60^\circ$, 三角形 ABC 是等边三角形,

所以 $AC = 2, AE = CE = 1, BE = \sqrt{3}$,

由于 $AD = CD, AD \perp CD$, 所以三角形 ACD 是等腰直角三角形, 所以 $DE = 1$.

$DE^2 + BE^2 = BD^2$, 所以 $DE \perp BE$,

由于 $AC \cap BE = E$, $AC, BE \subset$ 平面 ABC , 所以 $DE \perp$ 平面 ABC .

由于 $\triangle ADB \cong \triangle CDB$, 所以 $\angle FBA = \angle FBC$,

$$\text{由于} \begin{cases} BF = BF \\ \angle FBA = \angle FBC, \text{ 所以 } \triangle FBA \cong \triangle FBC, \\ AB = CB \end{cases}$$

所以 $AF = CF$, 所以 $EF \perp AC$,

由于 $S_{\triangle AFC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot EF$, 所以当 EF 最短时, 三角形 AFC 的面积最小值.

过 E 作 $EF \perp BD$, 垂足为 F ,

在 $\text{Rt}\triangle BED$ 中, $\frac{1}{2} \cdot BE \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot EF$, 解得 $EF = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

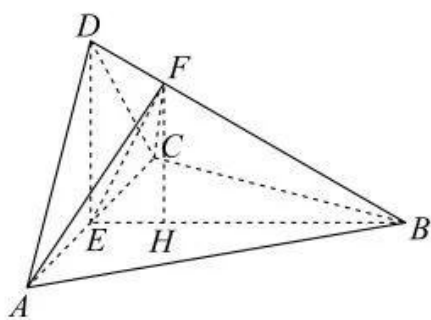
$$\text{所以 } DF = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}, BF = 2 - DF = \frac{3}{2},$$

$$\text{所以 } \frac{BF}{BD} = \frac{3}{4}.$$

过 F 作 $FH \perp BE$, 垂足为 H , 则 $FH \parallel DE$, 所以 $FH \perp$ 平面 ABC , 且 $\frac{FH}{DE} = \frac{BF}{BD} = \frac{3}{4}$,

$$\text{所以 } FH = \frac{3}{4},$$

$$\text{所以 } V_{E-ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot FH = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} \times \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$



19. 某地经过多年的环境治理, 已将荒山改造成了绿水青山. 为估计一林区某种树木的总材积量, 随机选取了 10 棵这种树木, 测量每棵树的根部横截面积 (单位: m^2) 和材积量 (单位: m^3), 得到如下数据:

样本号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总和
根部横截面积 x_i	0.04	0.06	0.04	0.08	0.08	0.05	0.05	0.07	0.07	0.06	0.6
材积量 y_i	0.25	0.40	0.22	0.54	0.51	0.34	0.36	0.46	0.42	0.40	3.9

并计算得 $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 0.038$, $\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 1.6158$, $\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 0.2474$.

- (1) 估计该林区这种树木平均一棵的根部横截面积与平均一棵的材积量;
- (2) 求该林区这种树木的根部横截面积与材积量的样本相关系数 (精确到 0.01);
- (3) 现测量了该林区所有这种树木的根部横截面积, 并得到所有这种树木的根部横截面积总和为 186m^2 . 已知树木的材积量与其根部横截面积近似成正比. 利用以上数据给出该林区这种树木的总材积量的估计值.

附: 相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \sqrt{1.896} \approx 1.377$.

【答案】(1) 0.06m^2 ; 0.39m^3

(2) 0.97

(3) 1209m^3

【解析】

【分析】(1) 计算出样本的一棵根部横截面积的平均值及一棵材积量平均值, 即

均一棵的根部横截面积与平均一棵的材积量;

(2) 代入题给相关系数公式去计算即可求得样本的相关系数值;

(3) 依据树木的材积量与其根部横截面积近似成正比, 列方程即可求得该林区这种树木的总材积量的估计值.

【小问 1 详解】

$$\text{样本中 10 棵这种树木的根部横截面积的平均值 } \bar{x} = \frac{0.6}{10} = 0.06$$

$$\text{样本中 10 棵这种树木的材积量的平均值 } \bar{y} = \frac{3.9}{10} = 0.39$$

据此可估计该林区这种树木平均一棵的根部横截面积为 0.06m^2 ,

平均一棵的材积量为 0.39m^3

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned} r &= \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i y_i - 10\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 10\bar{x}^2\right) \left(\sum_{i=1}^{10} y_i^2 - 10\bar{y}^2\right)}} \\ &= \frac{0.2474 - 10 \times 0.06 \times 0.39}{\sqrt{(0.038 - 10 \times 0.06^2)(1.6158 - 10 \times 0.39^2)}} = \frac{0.0134}{\sqrt{0.0001896}} \approx \frac{0.0134}{0.01377} \approx 0.97 \end{aligned}$$

则 $r \approx 0.97$

【小问 3 详解】

设该林区这种树木的总材积量的估计值为 $Y\text{m}^3$,

又已知树木的材积量与其根部横截面积近似成正比,

$$\text{可得 } \frac{0.06}{0.39} = \frac{186}{Y}, \text{ 解之得 } Y = 1209\text{m}^3.$$

则该林区这种树木的总材积量估计为 1209m^3

$$20. \text{ 已知函数 } f(x) = ax - \frac{1}{x} - (a+1)\ln x.$$

(1) 当 $a=0$ 时, 求 $f(x)$ 的最大值;

(2) 若 $f(x)$ 恰有一个零点, 求 a 的取值范围.

【答案】(1) -1

(2) $(0, +\infty)$

【解析】

【分析】(1) 由导数确定函数的单调性, 即可得解;

(2) 求导得 $f'(x) = \frac{(ax-1)(x-1)}{x^2}$, 按照 $a \leq 0$ 、 $0 < a < 1$ 及 $a > 1$ 结合导数讨论函数的单调性, 求得函数

的极值, 即可得解.

【小问 1 详解】

当 $a = 0$ 时, $f(x) = -\frac{1}{x} - \ln x, x > 0$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x^2}$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

所以 $f(x)_{\max} = f(1) = -1$;

【小问 2 详解】

$f(x) = ax - \frac{1}{x} - (a+1)\ln x, x > 0$, 则 $f'(x) = a + \frac{1}{x^2} - \frac{a+1}{x} = \frac{(ax-1)(x-1)}{x^2}$,

当 $a \leq 0$ 时, $ax-1 \leq 0$, 所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

所以 $f(x)_{\max} = f(1) = a-1 < 0$, 此时函数无零点, 不合题意;

当 $0 < a < 1$ 时, $\frac{1}{a} > 1$, 在 $(0, 1), \left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

在 $\left(1, \frac{1}{a}\right)$ 上, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

又 $f(1) = a-1 < 0$, 当 x 趋近正无穷大时, $f(x)$ 趋近于正无穷大,

所以 $f(x)$ 仅在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 有唯一零点, 符合题意;

当 $a = 1$ 时, $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2} \geq 0$, 所以 $f(x)$ 单调递增, 又 $f(1) = a-1 = 0$,

所以 $f(x)$ 有唯一零点, 符合题意;

当 $a > 1$ 时, $\frac{1}{a} < 1$, 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right), (1, +\infty)$ 上, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

在 $\left(\frac{1}{a}, 1\right)$ 上, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 此时 $f(1) = a-1 > 0$,

又 $f\left(\frac{1}{a^n}\right) = \frac{1}{a^{n-1}} - a^n + n(a+1)\ln a$, 当 n 趋近正无穷大时, $f\left(\frac{1}{a^n}\right)$ 趋近负无穷,

所以 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 有一个零点, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 无零点,

所以 $f(x)$ 有唯一零点, 符合题意;

综上, a 的取值范围为 $(0, +\infty)$.

【点睛】关键点点睛: 解决本题的关键是利用导数研究函数的极值与单调性, 把函数零点问题转化为函数的单调性与极值的问题.

21. 已知椭圆 E 的中心为坐标原点, 对称轴为 x 轴、 y 轴, 且过 $A(0, -2), B\left(\frac{3}{2}, -1\right)$ 两点.

(1) 求 E 的方程;

(2) 设过点 $P(1, -2)$ 的直线交 E 于 M, N 两点, 过 M 且平行于 x 轴的直线与线段 AB 交于点 T , 点 H 满足

$\overline{MT} = \overline{TH}$. 证明: 直线 HN 过定点.

【答案】(1) $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1$

(2) $(0, -2)$

【解析】

【分析】(1) 将给定点代入设出的方程求解即可;

(2) 设出直线方程, 与椭圆 C 的方程联立, 分情况讨论斜率是否存在, 即可得解.

【小问 1 详解】

解: 设椭圆 E 的方程为 $mx^2 + ny^2 = 1$, 过 $A(0, -2), B\left(\frac{3}{2}, -1\right)$,

$$\text{则} \begin{cases} 4n = 1 \\ \frac{9}{4}m + n = 1 \end{cases}, \text{解得} m = \frac{1}{3}, n = \frac{1}{4},$$

所以椭圆 E 的方程为: $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1$.

【小问 2 详解】

$A(0, -2), B\left(\frac{3}{2}, -1\right)$, 所以 $AB: y + 2 = \frac{2}{3}x$,

①若过点 $P(1, -2)$ 的直线斜率不存在, 直线 $x=1$. 代入 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$,

可得 $M(1, \frac{2\sqrt{6}}{3})$, $N(1, -\frac{2\sqrt{6}}{3})$, 代入 AB 方程 $y = \frac{2}{3}x - 2$, 可得

$T(\sqrt{6}+3, \frac{2\sqrt{6}}{3})$, 由 $\overline{MT} = \overline{TH}$ 得到 $H(2\sqrt{6}+5, \frac{2\sqrt{6}}{3})$. 求得 HN 方程:

$$y = (2 - \frac{2\sqrt{6}}{3})x - 2, \text{ 过点 } (0, -2).$$

②若过点 $P(1, -2)$ 的直线斜率存在, 设 $kx - y - (k+2) = 0$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$.

$$\text{联立} \begin{cases} kx - y - (k+2) = 0 \\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}, \text{ 得 } (3k^2 + 4)x^2 - 6k(2+k)x + 3k(k+4) = 0,$$

$$\text{可得} \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{6k(2+k)}{3k^2 + 4} \\ x_1 x_2 = \frac{3k(4+k)}{3k^2 + 4} \end{cases}, \begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{-8(2+k)}{3k^2 + 4} \\ y_1 y_2 = \frac{4(4+4k-2k^2)}{3k^2 + 4} \end{cases},$$

$$\text{且 } x_1 y_2 + x_2 y_1 = \frac{-24k}{3k^2 + 4} (*)$$

$$\text{联立} \begin{cases} y = y_1 \\ y = \frac{2}{3}x - 2 \end{cases}, \text{ 可得 } T(\frac{3y_1}{2} + 3, y_1), H(3y_1 + 6 - x_1, y_1).$$

$$\text{可求得此时 } HN: y - y_2 = \frac{y_1 - y_2}{3y_1 + 6 - x_1 - x_2}(x - x_2),$$

$$\text{将 } (0, -2), \text{ 代入整理得 } 2(x_1 + x_2) - 6(y_1 + y_2) + x_1 y_2 + x_2 y_1 - 3y_1 y_2 - 12 = 0,$$

$$\text{将 } (*) \text{ 代入, 得 } 24k + 12k^2 + 96 + 48k - 24k - 48 - 48k + 24k^2 - 36k^2 - 48 = 0,$$

显然成立,

综上, 可得直线 HN 过定点 $(0, -2)$.

【点睛】求定点、定值问题常见的方法有两种:

①从特殊入手, 求出定值, 再证明这个值与变量无关;

②直接推理、计算, 并在计算推理的过程中消去变量, 从而得到定值.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中选定一题作答, 并用

将

所选题目对应的题号方框涂黑。按所涂题号进行评分，不涂、多涂均按所答第一题评分；多答按所答第一题评分。

[选修 4—4：坐标系与参数方程]

22. 在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3} \cos 2t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$ ，(t 为参数)，以坐标原点为极点， x 轴正

半轴为极轴建立极坐标系，已知直线 l 的极坐标方程为 $\rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + m = 0$ 。

(1) 写出 l 的直角坐标方程；

(2) 若 l 与 C 有公共点，求 m 的取值范围。

【答案】 (1) $\sqrt{3}x + y + 2m = 0$

(2) $-\frac{19}{12} \leq m \leq \frac{5}{2}$

【解析】

【分析】 (1) 根据极坐标与直角坐标的互化公式处理即可；

(2) 联立 l 与 C 的方程，采用换元法处理，根据新设 a 的取值范围求解 m 的范围即可。

【小问 1 详解】

因为 $l: \rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + m = 0$ ，所以 $\frac{1}{2}\rho \cdot \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho \cdot \cos \theta + m = 0$ 。

又因为 $\rho \cdot \sin \theta = y$ ， $\rho \cdot \cos \theta = x$ ，所以化简为 $\frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}x + m = 0$ 。

整理得 l 的直角坐标方程： $\sqrt{3}x + y + 2m = 0$

【小问 2 详解】

联立 l 与 C 的方程，即将 $x = \sqrt{3} \cos 2t$ ， $y = 2 \sin t$ 代入

$\sqrt{3}x + y + 2m = 0$ 中，可得 $3 \cos 2t + 2 \sin t + 2m = 0$ ，

所以 $3(1 - 2 \sin^2 t) + 2 \sin t + 2m = 0$ ，

化简为 $-6 \sin^2 t + 2 \sin t + 3 + 2m = 0$ ，

要使 l 与 C 有公共点，则 $2m = 6 \sin^2 t - 2 \sin t - 3$ 有解，

令 $\sin t = a$ ，则 $a \in [-1, 1]$ ，令 $f(a) = 6a^2 - 2a - 3$ ， $(-1 \leq a \leq 1)$ ，

对称轴为 $a = \frac{1}{6}$ ，开口向上，

所以 $f(a)_{\max} = f(-1) = 6 + 2 - 3 = 5$ ，

$f(a)_{\min} = f(\frac{1}{6}) = \frac{1}{6} - \frac{2}{6} - 3 = -\frac{19}{6}$ ，

所以 $-\frac{19}{6} \leq 2m \leq 5$

m 的取值范围为 $-\frac{19}{12} \leq m \leq \frac{5}{2}$ 。

[选修 4—5：不等式选讲]

23. 已知 a, b, c 都是正数，且 $a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}} = 1$ ，证明：

(1) $abc \leq \frac{1}{9}$ ；

(2) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{1}{2\sqrt{abc}}$ ；

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 利用三元均值不等式即可证明；

(2) 利用基本不等式及不等式的性质证明即可。

【小问 1 详解】

证明：因为 $a > 0$ ， $b > 0$ ， $c > 0$ ，则 $a^{\frac{3}{2}} > 0$ ， $b^{\frac{3}{2}} > 0$ ， $c^{\frac{3}{2}} > 0$ ，

所以 $\frac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}}}{3} \geq \sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}} \cdot b^{\frac{3}{2}} \cdot c^{\frac{3}{2}}}$ ，

即 $(abc)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{3}$ ，所以 $abc \leq \frac{1}{9}$ ，当且仅当 $a^{\frac{3}{2}} = b^{\frac{3}{2}} = c^{\frac{3}{2}}$ ，即 $a = b = c = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$ 时取等号。

【小问 2 详解】

证明：因为 $a > 0$ ， $b > 0$ ， $c > 0$ ，

所以 $b+c \geq 2\sqrt{bc}$ ， $a+c \geq 2\sqrt{ac}$ ， $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ，

所以 $\frac{a}{b+c} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}$ ， $\frac{b}{a+c} \leq \frac{b}{2\sqrt{ac}} = \frac{b^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}$ ， $\frac{c}{a+b} \leq \frac{c}{2\sqrt{ab}} = \frac{c^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}$ ，

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{a^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}} + \frac{b^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}} + \frac{c^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}} = \frac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}} = \frac{1}{2\sqrt{abc}}$$

当且仅当 $a=b=c$ 时取等号.